Timothy Gowers

Matemáticas
Una breve introducción

Alianza editorial
El libro de bolsillo

Título original: *Mathematics: A Very Short Introduction*
Traducción: Dulcinea Otero-Piñeiro
Revisión técnica a cargo de David Galadí-Enríquez

Publicado originalmente en inglés en 2002. Esta traducción se ha realizado por acuerdo con Oxford University Press

Primera edición: 2008
Segunda edición: 2014
Primera reimpresión: 2016

Diseño de colección: Estudio de Manuel Estrada con la colaboración de Roberto Turégano y Lynda Bozarth
Diseño de cubierta: Manuel Estrada
Ilustración de cubierta: Muchacho resolviendo un problema de matemáticas en la pizarra. © Corbis / Cordon Press
Selección de imagen: Carlos Caranci Sáez

Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15
28027 Madrid
www.alianzaeditorial.es

ISBN: 978-84-206-9181-7
Depósito legal: M. 20943-2014
Printed in Spain

Si quiere recibir información periódica sobre las novedades de Alianza Editorial, envíe un correo electrónico a la dirección: alianzaeditorial@anaya.es

Índice

Prólogo

En los albores del siglo XX, el gran matemático David Hilbert reparó en que ciertos razonamientos matemáticos importantes presentaban una estructura similar. De hecho, apreció que a un cierto nivel de generalidad se podían considerar el mismo. Esta observación, y otras parecidas, dio lugar a una rama nueva de las matemáticas, y uno de sus conceptos fundamentales recibió el nombre de Hilbert. La noción del espacio de Hilbert arroja luz sobre una parte tan amplia de las matemáticas modernas, desde la teoría de números hasta la mecánica cuántica, que quien no conozca al menos los rudimentos de la teoría de los espacios de Hilbert no puede afirmar que disponga de una buena formación matemática.

Pues bien, ¿qué es un «espacio de Hilbert»? En los cursos universitarios típicos sobre matemáticas se define como un espacio pre-Hilbert que además es completo. Por supuesto para entender esto hay que saber que un espacio pre-Hilbert es un espacio vectorial dotado de un producto escalar. En estos cursos se cuenta con que el alumnado conozca de cursos anteriores las definiciones de espacio vectorial y de producto escalar, así como que un espacio es completo si cualquier sucesión de Cauchy que pueda definirse en él es convergente. Por supuesto, para que estas definiciones tengan sentido, los estudiantes deben saber las definiciones de sucesión de Cauchy y convergencia. Por mencionar tan sólo una de ellas (y no la más extensa) diremos que una sucesión $x_1, x_2, x_3,\ldots$ es de Cauchy si para cualquier número positivo ε existe un número entero N tal que para cualesquiera dos números enteros p y q mayores que N la distancia de x_p a x_q resulta menor o igual que ε.

En resumen, para abrigar cualquier esperanza de comprender qué es un espacio de Hilbert hay que aprender y digerir antes toda una jerarquía de conceptos de nivel inferior. Y no es de extrañar que la tarea requiera tiempo y esfuerzo. Como esto mismo sucede también con muchos de los conceptos matemáticos más importantes, cualquier libro que aspire a brindar una introducción accesible a las matemáticas se enfrenta a unas limitaciones considerables, más aún si se trata de una introducción breve.

En lugar de buscar algún modo ingenioso de esquivar esta dificultad, me he centrado en una barrera distinta que también afecta a la divulgación de las matemáticas. Ésta, más filosófica que técnica, separa a quienes se sienten a gusto con nociones tales como el infinito, la raíz cuadrada de –1, la vigésima sexta dimensión y el espacio curvado, de quienes las consideran paradojas inquietantes. Existe la posibilidad de sentirse cómodo con estas ideas sin entrar en tecnicismos, y pretendo explicar cómo.

Si hubiera que encontrarle un cometido a este libro, sería que la gente aprenda a pensar en abstracto porque, al hacerlo, sencillamente desaparecen numerosas dificultades filosóficas. En el capítulo 2 se explica en detalle a qué me refiero con el método abstracto. El capítulo 1 trata sobre un tipo de abstracción más familiar aunque relacionada: el proceso de destilar los aspectos esenciales de un problema del mundo real para convertirlo en uno matemático. Estos dos capítulos junto con el 3, donde se expone qué se entiende por demostración rigurosa, versan sobre matemáticas en general.

A partir de ahí se plantean temas más específicos. El último capítulo trata sobre las personas que se dedican a las matemáticas, más que sobre esta ciencia en sí, y, por tanto, presenta un carácter algo distinto al de los demás. Recomiendo leer el capítulo 2 antes que los últimos, pero, aparte de esto, el texto se organiza del modo más desjerarquizado que he podido: al final del libro no se da por supuesto que se comprenda y recuerde todo lo que aparece con anterioridad.

Para leer esta obra se precisan muy pocos conocimientos previos: el nivel de enseñanza secundaria o algún curso equivalente bastará. Pero sí he presupuesto cierto interés por parte del público, en lugar de esforzarme por despertárselo yo. Por esta razón he prescindido de anécdotas, caricaturas, signos de exclamación, títulos graciosos para encabezar los capítulos o dibujos del conjunto de Mandelbrot. Asimismo he eludido temas como la teoría del caos y el teorema de Gödel, cuya repercusión en la imaginación pública considero desproporcionada en relación con la influencia que tienen en la investigación matemática actual y que, en cualquier caso, aparecen bien tratados en muchos otros libros. En lugar de eso, he recurrido a asuntos más mundanos para exponerlos en detalle con la intención de mostrar que se pueden entender de un modo más sofisticado. En otras palabras, he apostado por la hondura más que por la anchura, y he intentado transmitir el atractivo de las matemáticas contemporáneas dejándolas hablar por sí mismas.

Quisiera dar las gracias al Instituto Clay de Matemáticas y a la Universidad de Princeton por el apoyo y la hospitalidad prestados durante parte de la redacción del libro. Mi mayor agradecimiento a Gilbert Adair, Rebecca Gowers, Emily Gowers, Patrick Gowers, Joshua Katz y Edmund Thomas por la lectura de los primeros borradores. Aunque su inteligencia y formación matemática sean excesivas para contarlos como público general, tranquiliza saber que lo que he escrito resulta inteligible al menos para algunas personas que no son profesionales del ramo. Sus comentarios han conllevado numerosas mejoras. Dedico este libro a Emily con la esperanza de que así se haga una idea somera de a qué dedico todo el día.

1. Modelos

¿Cómo se tira una piedra?

Supongamos que nos hallamos a ras de suelo en un día apacible y que tenemos una piedra en la mano que aspiramos a lanzar lo más lejos posible. Con independencia de la fuerza que se tenga para ello, la decisión más importante estriba en el ángulo con el que la piedra salga de la mano. Si el ángulo es demasiado pequeño, aunque la piedra cuente con mucha velocidad horizontal, caerá al suelo bastante pronto y, por tanto, no tendrá oportunidad de llegar muy lejos. Por otra parte, si se lanza la piedra demasiado alta, permanecerá más tiempo en el aire pero sin cubrir demasiado trecho a nivel de suelo. Está claro que hay que encontrar una solución intermedia.

La mejor, que se resuelve mediante una combinación de la física de Newton con algunos fundamentos de análisis matemático, resulta tan elegante como cabría esperar en estas circunstancias: la dirección de la piedra cuando sale de la mano debe elevarse con un ángulo de 45° sobre la horizontal. Esos mismos cálculos revelan que la piedra describirá una parábola mientras esté en el aire, e indican a qué velocidad viajará en cualquier momento dado después de abandonar la mano.

Parece, pues, que una combinación de ciencia y matemáticas permite predecir todo el comportamiento de la piedra desde el instante en que se arroja hasta el momento en que aterriza. Sin embargo, esto sólo sucede si estamos dispuestos a admitir una serie de supuestos simplificadores, como que la única fuerza que actúa sobre la piedra es la gravedad terrestre, y que esta fuerza tiene la misma magnitud y dirección en todo el recorrido. Sin embargo, eso no es cierto, porque no se tiene en cuenta la resistencia al aire, la rotación de la Tierra, el pequeño influjo gravitatorio de la Luna, el hecho de que el campo gravitatorio de la Tierra se debilita con la altura, ni el cambio gradual de la dirección indicada por una plomada a medida que nos trasladamos de un lugar a otro de la superficie terrestre. Y aun aceptando los cálculos susodichos, la recomendación de los 45° se basa en otra suposición implícita, a saber: que la velocidad de la piedra cuando sale de la mano no depende de la dirección de lanzamiento. Pero esto también es falso: con ángulos más pequeños disponemos de más fuerza para lanzar la piedra.

Teniendo en cuenta estas objeciones, algunas obviamente más serias que otras, ¿qué postura conviene adoptar ante los cálculos y las predicciones que se derivan de ellos? Un enfoque consistiría en tener en cuenta todas las objeciones posibles. Sin embargo, sería mucho más sensato actuar justo al contrario: decidir qué grado de precisión se necesita y, entonces, intentar lograrla del modo más sencillo. Si la experiencia nos dice que una premisa simplificadora tendrá un efecto mínimo en la respuesta, entonces debería aceptarse ese supuesto.

Por ejemplo, el efecto de la resistencia al aire en una piedra será ínfimo puesto que la piedra es pequeña, dura y bastante densa. No tiene mucho sentido complicar los cálculos tomando en cuenta la resistencia al aire si lo más probable es que se cometa un error considerable en el ángulo con el que al final se lance la piedra. Si queremos tenerlo en cuenta, entonces la siguiente regla empírica funciona bien prácticamente a todos los efectos: cuanta mayor resistencia al aire, más plano deberá ser el ángulo para compensarla.

¿Qué es un modelo matemático?

Cuando se examina la solución de un problema físico, a menudo, aunque no siempre, se puede establecer una distinción clara entre las aportaciones que proceden de la ciencia y las que provienen de las matemáticas. Los científicos desarrollan una teoría basada en parte en los resultados de observaciones y experimentos, y en parte en consideraciones más generales como la sencillez y la capacidad explicativa. Los matemáticos, o los científicos dedicados a las matemáticas, investigan entonces las consecuencias estrictamente lógicas de la teoría. En ocasiones, éstas son el resultado de cálculos rutinarios que predicen con exactitud la clase de fenómenos para cuya explicación se diseñó la teoría, pero otras veces las predicciones de una teoría resultan bastante inesperadas. Si éstas se confirman más tarde mediante la experimentación, entonces se obtiene una prueba impresionante a favor de la teoría.

No obstante, la noción de confirmación de una predicción científica resulta un tanto problemática, debido a la necesidad de recurrir a simplificaciones como las ya mencionadas. Por poner otro ejemplo, las leyes del movimiento y de la gravitación de Newton implican que al dejar caer dos objetos desde la misma altura, ambos llegan al suelo (si está nivelado) al mismo tiempo. Este fenómeno, señalado por primera vez por Galileo, contradice un tanto la intuición. De hecho, es peor que eso: si probamos a hacerlo con, digamos, una pelota de golf y otra de ping-pong, veremos que la de golf llega antes. Entonces, ¿en qué sentido estaba Galileo en lo cierto?

Por supuesto, es la resistencia del aire lo que impide considerar este pequeño experimento como una refutación de la teoría de Galileo: la experiencia demuestra que la teoría funciona bien cuando hay poca resistencia del aire. Quien considere demasiado oportunista recurrir a la resistencia del aire cada vez que fallan las predicciones de la mecánica newtoniana, restaurará su fe en la ciencia y su admiración por Galileo si tiene ocasión de ver caer una pluma en el vacío: realmente cae igual que lo haría una piedra.

Con todo, como las observaciones científicas nunca son completamente absolutas y concluyentes, se necesita algo mejor para describir la relación entre la ciencia y las matemáticas. Los matemáticos no aplican las teorías científicas directamente al mundo sino a *modelos*. En esta acepción, un modelo se puede concebir como una versión imaginaria y simplificada de la parte del mundo que es objeto de estudio, una que sí admite cálculos exactos. En el caso de una piedra, la relación entre el mundo y el modelo se asemeja a la relación que existe entre las figuras 1 y 2.

Fig 1. Pelota en el aire (I).

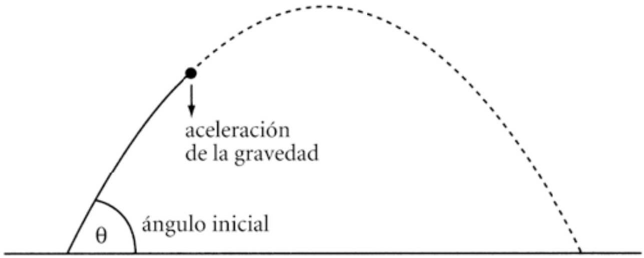

Fig 2. Pelota en el aire (II).

Hay muchas maneras de concebir modelos para una situación física determinada y hay que usar una mezcla de experiencia y consideraciones teóricas adicionales para decidir qué modelo concreto tiene más probabilidades de explicar el mundo real. Una prioridad a la hora de elegir un modelo consiste en que se comporte de manera muy cercana al comportamiento real y observado del mundo. Sin embargo, a menudo cobran más importancia otros factores, como la sencillez y la elegancia matemática. De hecho, existen modelos muy útiles que casi no mantienen parecido alguno con el mundo, tal como ilustran algunos de los ejemplos.

Tiradas de dos dados

Si se considera el comportamiento de un par de dados al hacerlos rodar, la experiencia revela poco realista plantearse ciertas cuestiones. Por ejemplo, no sería de esperar que alguien supiera de antemano el resultado de una tirada aunque dispusiera de una tecnología cara y los dados los tirara una máquina. En cambio, los interrogantes de naturaleza probabilística sí encuentran respuesta a menudo, como «¿qué probabilidad hay de que el resultado de ambos dados sume 7?», y las respuestas resultan útiles si, por ejemplo, estamos apostando al backgammon. Este segundo tipo de cuestiones permite crear modelos de la situación de manera muy simple mediante la representación de cada tirada de dados como la elección aleatoria de uno de los siguientes pares de números:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

El primer número de cada par representa el resultado del primer dado, y el segundo número el del segundo dado. Como hay justo seis pares formados por dos números que suman 7, las probabilidades de que salga un 7 son de 6 entre 36, o 1 entre 6.

A este modelo se le podría objetar que los dados obedecen a las leyes de Newton cuando se lanzan, al menos con un grado alto de precisión, de modo que la manera en que caen responde a cualquier cosa menos al azar: de hecho, en principio podría calcularse. Sin embargo, le estamos pidiendo mucho a la expresión «en principio», puesto que se trataría de cálculos de una complejidad extraordinaria y basados en una información acerca de la forma, composición, velocidad inicial y rotación de los dados más precisa que la que jamás podría llegar a medirse en la práctica. Por todo ello, el empleo de un modelo determinista algo más complejo no conllevaría ninguna ventaja.

Predicción del crecimiento demográfico

Las ciencias más «blandas», como la biología y la economía, están repletas de modelos matemáticos mucho más simples que los fenómenos que representan, y hasta deliberadamente imprecisos en ciertos aspectos, pero que aun así resultan útiles y esclarecedores. Por tomar un ejemplo biológico de gran importancia económica, imaginemos que aspiramos a predecir la población que tendrá un país dentro de 20 años. Un modelo muy simple que podría usarse representa todo el país como un par de números $(t, P(t))$. Aquí, t corresponde al tiempo, y $P(t)$ equivale al tamaño de la población en el instante t. Además tenemos dos números, n y m, que representan los índices de natalidad y mortalidad. Éstos se definen como el número de nacimientos y fallecimientos cada año en proporción a la población.

Supongamos que sabemos que la población al principio del año 2002 es P. Según el modelo recién expuesto, el número de nacimientos y muertes a lo largo del año ascenderá a nP y mP, respectivamente, de modo que la población a comienzos de 2003 será $P + nP - mP = (1 + n - m)P$. Este razonamiento es válido para cualquier año, así que tenemos la fórmula $P(a + 1) = (1 + n - m)P(a)$, lo que significa que la población a comienzos del año $a + 1$ es $(1 + n - m)$ veces la población a comienzos del año a. En otras palabras, cada año la población se multiplica por $(1 + n - m)$. De lo que se infiere que en 20 años se multiplicará por $(1 + n - m)^{20}$, lo que responde la pregunta inicial.

Incluso este modelo básico basta para convencernos de que, si la tasa de natalidad supera de manera significativa la tasa de mortalidad, entonces la población aumentará a una velocidad extrema. Sin embargo, también es poco realista en aspectos que pueden tornar las predicciones muy imprecisas. Por ejemplo, suponer que las tasas de natalidad y mortalidad se mantienen constantes durante 20 años no resulta muy creíble, puesto que en el pasado se han visto afectadas por cambios sociales y acontecimientos políticos como mejoras sanitarias, enfermedades nuevas, incrementos en la media de edad a la que las mujeres empezaban a tener hijos, incentivos fiscales y guerras ocasionales a gran escala. Otro motivo para contar con que las tasas de natalidad y mortalidad varíen con el tiempo estriba en que la edad de la población del país se distribuirá de manera más bien desigual. Por ejemplo, si se produjo una explosión demográfica 15 años atrás, entonces hay razones para pensar que la tasa de natalidad crecerá en cuestión de 10 o 15 años.

Por tanto, resulta tentador complicar el modelo con la introducción de factores adicionales. Podrían considerarse tasas de natalidad y mortalidad, $n(t)$ y $m(t)$, que variaran con el tiempo. En lugar de buscar un solo número $P(t)$ que represente el tamaño de la población, también se podría aspirar a conocer cuánta gente hay en cada grupo de edad. También sería útil saber lo máximo posible acerca de las actitudes sociales y el comportamiento de esos grupos de edad para predecir la evolución probable de las tasas de natalidad y mortalidad futuras. La obtención de esta suerte de información estadística resulta difícil y costosa, pero los datos obtenidos mejorarán en gran medida la precisión de las predicciones. Por esta razón, ningún modelo único es mejor que el resto. Por tanto, lo máximo razonable que se le puede pedir a cualquier modelo es una predicción condicional: a saber, aquella que revela qué efectos conllevarán los cambios sociales y políticos en caso de que se produzcan.

El comportamiento de los gases

Según la teoría cinética de los gases, iniciada por Daniel Bernoulli en 1738 y desarrollada por Maxwell, Boltzmann y otros en la segunda mitad del siglo XIX, los gases consisten en moléculas en movimiento, y muchas de sus propiedades, caso de la temperatura y la presión, son propiedades estadísticas de esas moléculas. La temperatura, por ejemplo, se corresponde con su velocidad promedio.

Teniendo esto en cuenta, intentemos desarrollar el modelo de un gas contenido en una caja cúbica. La caja debe representarse, por supuesto, mediante un cubo (es decir, un cubo matemático en lugar de físico) y, como las moléculas son muy pequeñas, se representarán, como es natural, mediante puntos dentro del cubo. Pero se supone que esos puntos se mueven, de modo que hay que decidir qué reglas determinan cómo se mueven. Una vez aquí, hay que realizar varias elecciones.

Si sólo hubiera una molécula en la caja, entonces regiría una regla obvia: viaja a una velocidad constante y rebota en las paredes de la caja al chocar con ellas. El modo más simple concebible para generalizar este modelo consiste, pues, en tomar N moléculas, donde N es algún número grande, y suponer que todas se comportan de este modo, sin que se produzca ninguna interacción entre ellas en absoluto. Para poner en marcha el modelo de N moléculas hay que elegir la posición y la velocidad inicial de las moléculas o, más bien, de los puntos que las representan. Un buen modo de hacerlo consiste en decidir de forma aleatoria, ya que es de suponer que en cualquier instante dado, las moléculas de un gas real se distribuyan y muevan en muchas direcciones.

No es difícil explicar a qué nos referimos con un punto aleatorio dentro del cubo, o una dirección aleatoria, pero está menos claro cómo se elige una velocidad al azar, puesto que la velocidad puede adquirir cualquier valor desde 0 al infinito. Para eludir esta dificultad, aceptaremos el supuesto inverosímil desde un punto de vista físico de que todas las moléculas se mueven a la misma velocidad, y que sólo se eligen de manera aleatoria las posiciones iniciales y las direcciones. La figura 3 ilustra una versión bidimensional del modelo resultante.

La suposición de que estas *N* moléculas se mueven con absoluta independencia unas de otras es, sin lugar a dudas, una simplificación excesiva. Implicaría, por ejemplo, que no hay esperanza de usar este modelo para comprender por qué un gas se transforma en líquido a temperaturas lo bastante bajas: si frenamos los puntos del modelo, se obtiene el mismo modelo

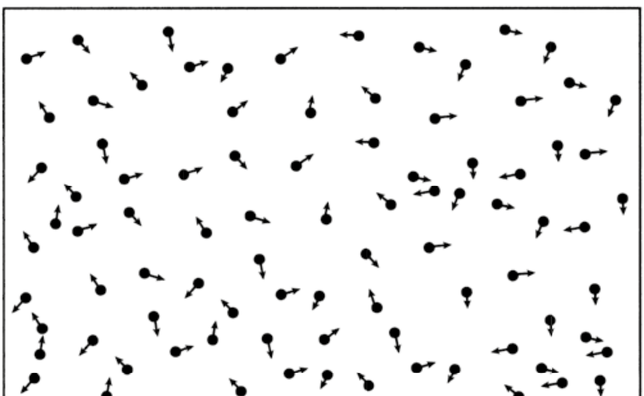

Fig 3. Modelo bidimensional de un gas.

pero con un funcionamiento más lento. En cambio, sí sirve para explicar buena parte del comportamiento de los gases reales. Por ejemplo, imaginemos qué ocurriría si la caja fuera encogiéndose de manera gradual. Las moléculas seguirán moviéndose a la misma velocidad, pero ahora, debido a la pequeñez de la caja, se toparán con las paredes con más frecuencia y habrá menos pared con la que chocar. Por estas dos razones, aumentará el número de colisiones por segundo en cualquier área dada de pared. Estas colisiones explican la presión que ejercen los gases, de modo que podemos concluir que al comprimir un gas en un volumen menor, es probable que gane presión (tal como confirma la observación). Un razonamiento similar explica por qué crece también la presión cuando se eleva la temperatura de un gas sin aumentar el volumen. Y no es demasiado difícil calcular las relaciones numéricas entre la presión, la temperatura y el volumen.

El recién descrito se aproxima al de Bernoulli. Uno de los logros de Maxwell consistió en descubrir un razonamiento teórico elegante para resolver el problema de cómo elegir las velocidades iniciales de un modo más realista. Para entenderlo, empecemos por eliminar el supuesto de que las moléculas no interaccionan. En su lugar, contaremos con que de tanto en tanto chocan entre sí, como un par de bolas de billar diminutas, tras lo cual adquieren otra velocidad y otra dirección que dependen de las leyes de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento pero